

Relaxation lagrangienne pour le filtrage d'une contrainte-automate à coûts multiples

Julien Menana, Sophie Demassej and Narendra Jussien

Ecole des Mines de Nantes - LINA CNRS UMR 6241

4 rue Alfred Kastler - BP 20722

F-44307 Nantes Cedex3, France

{julien.menana, sophie.demassey, narendra.jussien}@emn.fr

La programmation par contraintes est un paradigme de résolution approprié dans le domaine de la planification d'horaires. Elle offre une modélisation concise et évolutive des nombreuses conditions, hétérogènes et versatiles, qui définissent typiquement un emploi du temps valide. La contrainte globale **regular** [1] permet dans ce contexte de spécifier sous la forme d'un automate fini déterministe, les séquences d'activités qui correspondent à un horaire réalisable, et de forcer cette condition de réalisabilité par filtrage des séquences non-reconnues par l'automate. La variante **cost-regular** [2] prend en compte des coûts d'affectation des activités. Traiter les coûts au sein de la contrainte-automate améliore considérablement la profondeur du filtrage sans augmenter la complexité temporelle – cubique en la taille de la séquence – de l'algorithme.

L'algorithme de filtrage de **cost-regular** repose sur la recherche dans le graphe acyclique obtenu par le déploiement de l'automate des plus courts (resp. longs) chemins. Les informations fournies permettent non seulement de déterminer le coût minimal (resp. maximal) de l'affectation d'une séquence d'activités réalisable, mais aussi de retirer les affectations qui mèneraient à un coût supérieur (resp. inférieur) aux bornes fournies.

Si l'utilisation de **cost-regular** permet une modélisation encore plus fonctionnelle que celle proposée par **regular**, il est possible de pointer quelques lacunes pour la modélisation de planifications d'horaires. En effet, il est quasiment obligatoire lorsque l'on souhaite par exemple borner le temps passé sur chacune des activités d'utiliser de manière transversale des contraintes de cardinalité. L'utilisation de cette contrainte transversale n'exploite pas la structure du graphe déduit de l'automate. On peut aisément penser que gérer simultanément tous les coûts au sein de l'automate permet d'extraire plus d'informations pour réduire l'espace de recherche, mais aussi d'éviter de lourds échanges d'informations entre deux contraintes structurellement orthogonales.

Afin de répondre à ces problématiques, nous proposons de définir une nouvelle contrainte **multi-cost-regular** qui étant donnés : $\Pi = (S, \Sigma, \delta, s, A)$ un automate fini déterministe (DFA) ; $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une suite de variables de domaines finis $D = (dom(x_1), \dots, dom(x_n))$; $Z = (z^0, \dots, z^r)$ un ensemble de variables de domaines bornés et C une matrice de coûts telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in dom(x_i), c_{ij}$ est le vecteur de coût de dimension r correspondant à l'affectation de j à x_i , assure

$$X \in \mathcal{L}(\Pi) \quad \text{et,} \quad \forall k \in \llbracket 0, r \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n c_{ix_i}^k = z^k$$

La puissance de modélisation d'une telle contrainte n'est pas gratuite car le problème sous-jacent à cette contrainte, un plus court chemin sous contraintes de ressources RCSP, est

NP-complet [3]. Il est donc nécessaire de bien calibrer l'effort fourni lors de la résolution afin de trouver le bon compromis entre coût et efficacité.

Le problème de plus court chemin sous contraintes de ressources **RCSPP** est le problème de trouver le plus court chemin dans un graphe orienté et valué $G = (V, E, c)$ entre une source s et un puits t de manière à ce que la quantité totale de ressources consommées sur chaque arc ne dépasse pas une limite donnée.

Afin de résoudre ce type de problème, deux grandes classes de solutions existent : les algorithmes d'étiquetage de graphes et les algorithmes fondés sur une relaxation lagrangienne des contraintes de ressources. [3]. Pour des raisons de mémoire, nous nous sommes tournés vers la seconde classe d'algorithmes où le problème est relâché en intégrant les contraintes de ressources au sein de la fonction objectif. L'intégration d'une relaxation lagrangienne au sein d'un algorithme de filtrage a été introduite par Sellmann [4], suivant le principe établi par Focacci, Lodi et Milano [5] de filtrage des variables de décision à partir d'un calcul de coût. Le point important est le théorème qui dit qu'une valeur n'appartenant pas à une solution dans un sous problème lagrangien ne peut appartenir à une solution dans le problème principal. Nous avons étendu ce théorème au niveau de la structure même du graphe, montrant qu'un arc ne pouvant appartenir à une solution d'un sous problème, n'appartiendra pas à un chemin solution du **RCSPP**.

La relaxation lagrangienne associée consiste à résoudre une série de sous problèmes lagrangiens qui prennent la forme de simples plus courts chemins. Chacun de ses sous-problèmes permet de retirer des valeurs qui n'appartiennent à aucune solution. La suite de ses plus courts chemins, converge vers une borne inférieure du **RCSPP**. De manière similaire à la contrainte **cost-regular**, le calcul de la borne supérieure permet également, à travers une suite de plus longs chemins, de réduire la taille des domaines. Selon les sous-problèmes que l'on résout, leur nombre et la qualité des bornes que l'on calcule, il est possible d'augmenter la puissance du filtrage ou de limiter le nombre de calculs effectués.

La contrainte **multi-cost-regular** permet donc de mutualiser les contraintes de séquençement et de cardinalité dans de nombreux problèmes de planifications d'horaires. En outre, l'existence dans le catalogue de contraintes globales [6] de contraintes modélisables par un automate à tableau de compteurs permet également d'imaginer dériver automatiquement les algorithmes de filtrage de ces contraintes à partir de leur représentation.

Références

1. G. Pesant, "A regular language membership constraint for finite sequences of variables," in *CP*, pp. 482–495, 2004.
2. S. Demassej, G. Pesant, and L.-M. Rousseau, "A cost-regular based hybrid column generation approach," *Constraints*, vol. 11, no. 4, pp. 315–333, 2006.
3. G. Handler and I. Zang, "A Dual Algorithm for the Restricted Shortest Path Problem," *Networks*, vol. 10, pp. 293–310, 1980.
4. M. Sellmann, "Theoretical foundations of cp-based lagrangian relaxation," *Principles and Practice of Constraint Programming –CP 2004*, pp. 634–647, 2004.
5. F. Focacci, A. Lodi, and M. Milano, "Cost-based domain filtering," *Principles and Practice of Constraint Programming –CP'99*, pp. 189–203, 1999.
6. N. Beldiceanu, M. Carlsson, and J. Rampon, "Global Constraint Catalog," tech. rep., EMN, 2008.